STUCOM

Centre d'Estudis

www.stucom.com

Homologat i concertat per
la Generalitat de Catalunya

Dep. de Ciències	2007-2008
2 BAT 1	
MATEMÀTIQUES	
PAU-JUNY	
Toni Gregori	
20080611	

Temari: **2n de Batxillerat**

QÜESTIONS

1.- Se sap que certa funció derivable $F(x)$ verifica les condicions següents:

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \qquad i \qquad F(1) = 3$$

a) Trobeu $F(x)$

b) Calculeu l'àrea compresa entre $F(x)$ i l'eix OX des de $x = 0$ fins $x = 1$.

[1 punt per cada apartat]

2.- Considereu les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ & -2 \end{pmatrix}$.

a) Trobeu la matriu M, cuadrada d'ordre 2, ta que $M \cdot A = B$.

b) Comproveu que $M^2 = I_2$ (matriz identitat d'ordre 2) i deduïu l'expressió de M^n.

[1 punt per cada apartat]

3.- Discutiu el sistema d'equacions lineals següent en funció dels valors del paràmetre m.

$$\begin{cases} x + y + (m-1)z = 1 \\ x + (m-1)y + z = m-1 \\ (m-1)x + y + z = m+2 \end{cases}$$

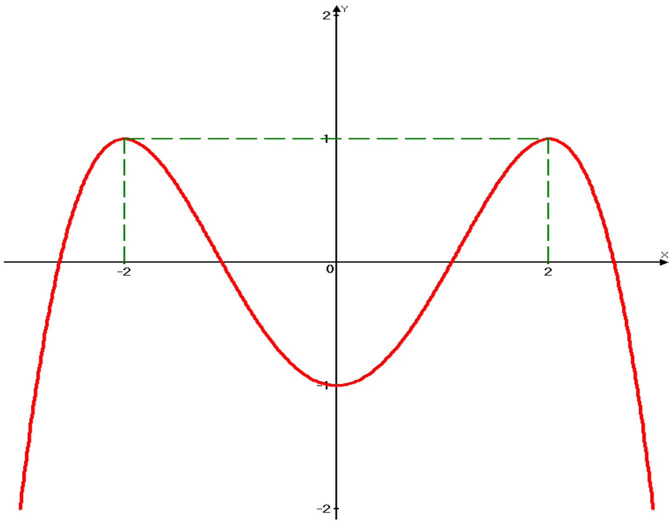
[2 punts]

4.- Trobeu l'equació de la recta perpendicular al pla $\pi : 2x - y + z + 3 = 0$, que passa pel punt $(-1,3,a)$ del pla.

[2 punts]

PROBLEMES

5.- Considereu una funció tal que la seva representació gràfica a l'interval $(-3, 3)$ és la següent:



a) Determineu les abscisses dels punts extrems (màxims i minims) relatius.
b) Estudieu el creixement I decreixement de la funció a l'interval $(-3,3))$.
c) Feu un esbós de la gràfica de la derivada dàquesta funció.
d) Sabent que la funció és de la forma $f(x)=ax^4+bx^2+c$, trobeu de quina funció es tracta.
[0,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b;1 punt per l'apartat c; 2 punts per l'apartat d]

6.- Donades les rectes $r:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ i $s:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+7}{2}=\dfrac{z+5}{3}$ i el punt $P=(1,1,-1)$, volem trobar l'equació de la recta que passa per P i que talla a r i s. Pera conseguir-ho:

a) Trobeu l'equació general o cartesiana (és a dir l'equació de la forma $Ax+By+Cz+D=0$) del pla π que conté la recta r i el punt P.
b) Trobeu el punt M calculant el punt d'intersecció del pla π amb la recta s.
c) Trobeu la recta que passa pels punts P i M.
d) Comproveu que la recta trobada en l'apartat anterior és la que busquem.
[1 punt per cada apartat]

RESOLUCIÓ

1.- a)

$$\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{4}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1}+k = \frac{x^{3/4}}{3/4}+k = \frac{4}{3}x^{3/4}+k$$

$$F(1)=3 \Rightarrow \frac{4}{3}(1)^{3/4}+k=3 \Rightarrow k=3-\frac{4}{3}=\frac{5}{3} \Rightarrow \underline{\underline{F(x)=\frac{4}{3}x^{3/4}+\frac{5}{3}}} \bullet$$

b) La funció entre 0 i 1 és positiva, no tenim problemes de signe:

$$\int_0^1\left(\frac{4}{3}x^{3/4}+\frac{5}{3}\right)dx = \left[\frac{4}{3}\cdot\frac{x^{3/4+1}}{3/4+1}+\frac{5}{3}x\right]_0^1 = \left[\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{7}\cdot 1^{7/3}+\frac{5}{3}\cdot 1\right]-[0]=\frac{28}{21}+\frac{5}{3}=\frac{51}{21}=\underline{\underline{\frac{17}{7}}} \bullet$$

2.- a)

$$M\cdot\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix} \rightarrow M=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}=*$$

$$\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\end{vmatrix}=2+6=8 \rightarrow \begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\end{pmatrix}^{T}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}2 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$*=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}2 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}8 & 0\\ 0 & -8\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=M}} \bullet$$

b)

$$M^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0 & 1-1\\ 0+0 & 0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$$

$$M^3=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=M$$

$$M^4=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=M^2\cdot M^2=I_2\cdot I_2=I_2$$

$$\underline{\underline{M^n=\begin{cases}Si\ n\ \text{és}\ parell: I_2\\ Si\ n\ \text{és}\ senar: M\end{cases}}} \bullet$$

3.-

$$\begin{cases}x+y+(m-1)z=1\\ x+(m-1)y+z=m-1\\ (m-1)x+y+z=m+2\end{cases}$$

$$(A/\overline{A})=\begin{pmatrix}1 & 1 & m-1 & \vdots & 1\\ 1 & m-1 & 1 & \vdots & m-1\\ m-1 & 1 & 1 & \vdots & m+2\end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m-1 \\ 1 & m-1 & 1 \\ m-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = m-1+m-1+m-1-\left[(m-1)^3+1+1\right] =$$

$$= 3m-3-\left(m^3-3m^2+3m-1\right)-2 = -m^3+3m^2-4$$

Per Ruffini: $-m^3+3m^2-4 = -(m-2)^2\cdot(m+1)$

$*\quad Si \quad m \neq 2 \ i \ m \neq -1 \quad \Rightarrow \quad \det A \neq 0 \quad \Rightarrow \quad rang\ A = 3 \ i \ com \ rang\ \overline{A} < 4 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow ranA = 3 = rang\,\overline{A} \quad \rightarrow \quad COMPATIBLE \quad DETERMINAT\, \bullet$

$$** \quad Si \quad m=2 \quad \rightarrow \quad \left(A/\overline{A}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 4 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad rang\ A = 1 \ i \ rang\ \overline{A} = 2 \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$$

$INCOMPATIBLE\, \bullet$

$$*** \quad Si \quad m=-1 \quad \rightarrow \quad \left(A/\overline{A}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \vdots & -2 \\ -2 & 1 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad rangA = 2 = rang\overline{A}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \ \ en \ A \ \ i \ \ C_4 = C_2 \quad \rightarrow \quad rang\ \overline{A} \ no \ pot \ augmentar$$

$$\Rightarrow \quad COMPATIBLE \ INDETERMINAT, \ grau \ de \ llibertat \ 3-2=1\, \bullet$$

4.-

$$\pi : 2x-y+z+3=0 \quad \rightarrow \quad VA_\pi = (2,-1,1) \quad \rightarrow \quad r \perp \pi \quad \Rightarrow \quad v_r = VA_\pi$$

$$(-1,3,\ a) \in \pi \quad \Rightarrow \quad 2\cdot(-1)-(3)+a+3=0 \quad \rightarrow \quad a=2$$

$$\Rightarrow \quad recta\ r: \quad \underline{\underline{(x,y,z)=(-1,3,2)+\lambda\cdot(2,-1,1)}}\, \bullet$$

5.-

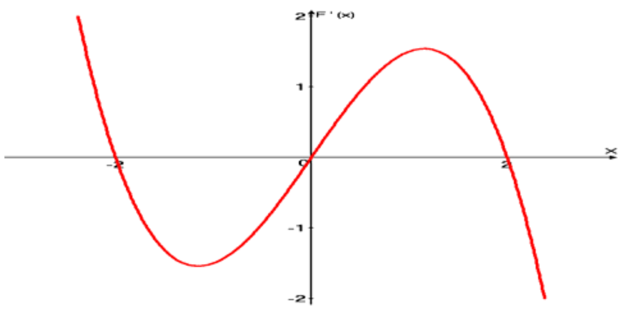
a) $Màxims: x=-2 \ i \ x=2. \quad Mínim: x=0\, \bullet$

b)

$Creix: \forall x \in (-3,-2] \cup [0,2) \ \ i \ estrictament \ \forall x \in (-3,-2) \cup (0,2)$

$Decreix: \forall x \in [-2,0) \cup [2,3) \ \ i \ \ estrictament \ \forall x \in (-2,0) \cup (2,3)$

c)



RESOLUCIÓ

Per fer-ho:

$$F \text{ creix} \Rightarrow \quad F' > 0, \text{ zona positiva.} \quad \text{Màxim}: F' = 0 \quad \rightarrow \quad \text{talla a l'eix } X.$$
$$F \text{ decreix} \Rightarrow \quad F' < 0, \text{ zona negativa.} \quad \text{Mínim}: F' = 0 \quad \rightarrow \quad \text{talla a l'eix } X$$
$$\text{On } F' \text{ té els màxims i mínims són les inflexions de } F.$$

d)

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$$
$$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$$

$$\left.\begin{array}{lll} f(-2)=1 & \rightarrow & a(-2)^4 + b(-2)^2 + c = 1 \\ f(0)=-1 & \rightarrow & a\cdot 0 + b\cdot 0 + c = -1 \\ f(2)=1 & \rightarrow & a(2)^4 + b(2)^2 + c = 1 \\ f'(-2)=0 & \rightarrow & 4a(-2)^3 + 2b(-2) = 0 \\ f'(0)=0 & \rightarrow & 4\cdot 0 + 2b\cdot 0 = 0 \\ f'(2)=0 & \rightarrow & 4a\cdot(2)^3 + 2b(2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 16a + 4b + c = 1 \\ c = -1 \\ 32a + 4b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 16a + 4b = 2 \\ 32a + 4b = 0 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad b = -\frac{32a}{4} = -8a \quad \Rightarrow \quad 16a + 4(-8a) = 2 \quad \Rightarrow \quad -2 = 16a \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad b = 1$$
$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{y = -\frac{1}{8}x^4 + 1x^2 - 1}} \bullet$$

6.-

$$P(1,1,-1) \qquad r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1} \qquad s: \frac{x-1}{1} = \frac{y+7}{2} = \frac{z+5}{3}$$

a)

$$\pi: \left.\begin{array}{l} P(1,1,-1) \\ \text{conté a } r \left\{\begin{array}{l}(2,-1,0) \\ v_r = (1,2,-1)\end{array}\right. \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \pi: \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y-1 & 2 & -2 \\ z+1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad 2x - 2 - y + 1 - 2z - 2 - 2z - 2 - 2x + 2 - y + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad -2y - 4z - 2 = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{y + 2z + 1 = 0}} \bullet$$

b)

$$M: \left\{\begin{array}{l} y + 2z + 1 = 0 \\ \left.\begin{array}{l} 2x - 2 = y + 7 \\ 3x - 3 = z + 5 \end{array}\right\} \end{array}\right. \rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} y + 2z + 1 = 0 \\ 2x - 9 = y \\ 3x - 8 = z \end{array}\right\} \rightarrow \quad 2x - 9 + 6x - 16 + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad 8x = 24$$

$$\rightarrow \quad x = 3 \quad \rightarrow \quad z = 1 \quad \rightarrow \quad y = -3 \quad \Rightarrow \quad M = (3,-3,1) \bullet$$

c)

$$\text{Recta } t: \ (x,y,z) = (1,1,-1) + \lambda \cdot [(3,-3,1) - (1,1,-1)] = (1,1,-1) + \lambda \cdot (2,-4,2) \bullet$$

RESOLUCIÓ

d)

La recta t talla a la recta s ja que conté el punt M, ara falta veure que talla a r:

$$\left.\begin{array}{l}(x,y,z)=(1,1,-1)+\lambda(2,-4,2)\\ \left.\begin{array}{l}2x-4=y+1\\ -x+2=z\end{array}\right\}r\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}2(1+2\lambda)-4=1-4\lambda+1\\ -1-2\lambda+2=-1+2\lambda\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}\lambda=4/8\\ \lambda=2/4\end{array}\right. \text{ talla en}$$

$$\text{el punt } (x,y,z)=\left(1+2\cdot\frac{1}{2},1-4\cdot\frac{1}{2},-1+2\cdot\frac{1}{2}\right)=(2,-1,0).$$

GRÀFICAMENT: