



STUCOM

Centre d'Estudis

www.stucom.com

Homologat i concertat per
la Generalitat de Catalunya

Dep. de Ciències 2007-2008

2 BAT 3

MATEMÀT. APL.CIE.SOC.

PAU-JUNY

Toni Gregori

20080611

Temari: 2n de Batxillerat

QÜESTIONS

1.- Considereu el sistema d'inequacions següent:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 3y \leq 18 \\ x + y \leq 10 \end{array} \right\}$$

a) Representeu gràficament la regió de solucions.
[1 punt]

b) Determineu el màxim de la funció $f(x, y) = 3x + 5y$ en aquesta regió i per a quins valors s'assoleix aquest màxim.
[0,5 punts]

c) Determineu el màxim de la funció $f(x, y) = 3x + 3y$ en aquesta regió i per a quins valors s'assoleix aquest màxim.
[0,5 punts]

2.- Determineu els intervals de creixement i decreixement, així com els màxims i mínims de la funció $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$.
[2 punts]

3.- En un problema de programació lineal, la regió de solucions és el quadrat de vèrtexs $(1,1)$, $(1,3)$, $(3,3)$ i $(3,1)$, i la funció objectiu és $B(x, y) = 3x + 2y$.

a) Determineu en quin punt és màxima la funció objectiu i quin és aquest valor màxim.
[1 punt]

b) Doneu un conjunt d'inequacions que determini la regió de solucions.
[1 punt]

4.- Considereu el sistema d'equacions següent:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ ax + 10y + 4z = 2 \end{array} \right\}$$

a) Trobeu els valors de a per als quals el sistema no és compatible determinat.
[1 punt]

b) Trobeu el valor de a per al qual el valor de x és 2. Determineu també els valors de y i de z en aquest cas.
[1 punt]



STUCOM

Centre d'Estudis

www.stucom.com

Homologat i concertat per

la Generalitat de Catalunya

Dep. de Ciències 2007-2008

2 BAT 3

MATEMÀT. APL.CIE.SOC.

PAU-JUNY

Toni Gregori

20080611

Temari: **2n de Batxillerat**

PROBLEMES

5.- Un trajecte de 200 km s'ha de fer combinant taxi, ferrocarril i autobús. El cost del taxi és de 5 €/km ; el del ferrocarril, de 2 €/km , i el de l'autobús, de 3 €/km . El recorregut ens ha costat 500 €, per haver fet el doble de kilòmetres amb ferrocarril que amb taxi i autobús junts. Determineu les distàncies que hem recorregut amb cada mitjà de transport.

[4 punts]

6.- Un equip de treballadors ha de fer la collita d'un camp de pomeres a partir de l'1 d'octubre i només pot treballar durant un dia. Si la collita es fa l'1 d'octubre es colliran 60 tones i el preu serà de 2000 €/tona. Sabem que a partir d'aquest dia, la quantitat que es pot collir augmenta en una tona cada dia, però el preu de la tona disminueix en 20 €/dia.

a) Determineu la fórmula que expressa els ingressos que s'obtenen en funció del nombre de dies que es deixen passar des de l'1 d'octubre per fer la collita.

[1 punt]

b) Trobeu quants dies han de passar perquè els ingressos per la collita siguin màxims.

[1 punt]

c) Digueu quin és el valor màxim dels ingressos per la collita.

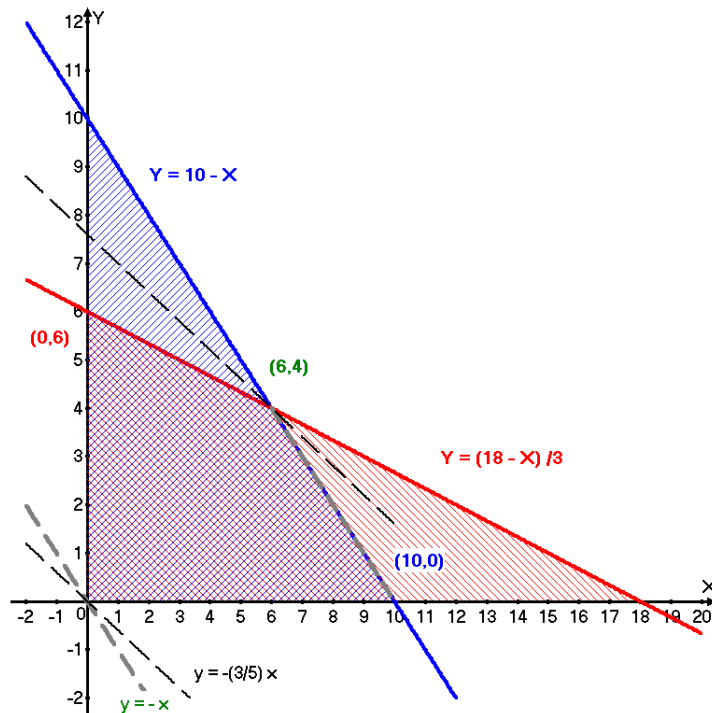
[1 punt]

d) Trobeu quants dies han de passar perquè els ingressos per la collita siguin els mateixos que si es fes el dia 1 d'octubre.

[1 punt]

RESOLUCIÓ

1.-



	(0,0)	(0,6)	(6,4)	(10,0)
$f(x,y) = 3x + 5y$	$3 \cdot 0 + 5 \cdot 0$	$3 \cdot 0 + 5 \cdot 6$	$3 \cdot 6 + 5 \cdot 4$	$3 \cdot 10 + 5 \cdot 0$
	0	30	38	30
$f(x,y) = 3x + 3y$	$3 \cdot 0 + 3 \cdot 0$	$3 \cdot 0 + 3 \cdot 6$	$3 \cdot 6 + 3 \cdot 4$	$3 \cdot 10 + 3 \cdot 0$
	0	18	30(*)	30(*)

(*) Per tant l'agafa en tot el segment d'extremes els dos punts donats.

2.- La funció donada és contínua, per ser-ho producte. Per tant té un comportament regular.

$$f(x) = x^2 \cdot e^{-x} \rightarrow f'(x) = 2x \cdot e^{-x} + x^2 \cdot e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x} \cdot (2x - x^2)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{-x} \cdot (2x - x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{-x} = 0, \text{ no pot ser.} \\ 2x - x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases}$$

$$f''(x) = e^{-x}(-1) \cdot (2x - x^2) + e^{-x} \cdot (2 - 2x)$$

$$f''(0) = 0 + 1 \cdot 2 = 2 > 0 \Rightarrow \text{Mínim en } (0, f(0)) = (0, 0)$$

$$f''(2) = 0 + \frac{1}{e^2}(2 - 4) < 0 \Rightarrow \text{Màxim en } \left(2, \frac{4}{e^2}\right)$$

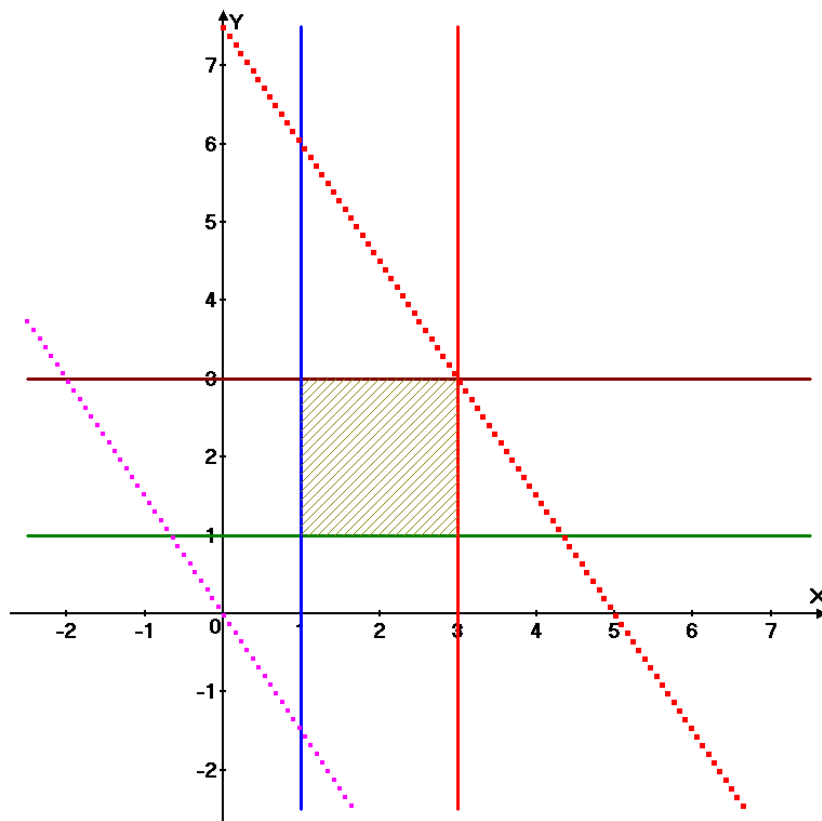
RESOLUCIÓ

Creixement i decreixement :

A partir de la continuïtat :

$$(-\infty, \infty) \rightarrow \begin{cases} (-\infty, 0) \rightarrow \text{decreix} \\ (0, 2) \rightarrow \text{creix} \\ (2, +\infty) \rightarrow \text{decreix} \end{cases}$$

3.-



	(1,1)	(1,3)	(3,1)	(3,3)
$f(x,y) = 3x + 2y$	$3 \cdot 1 + 2 \cdot 1$	$3 \cdot 1 + 2 \cdot 3$	$3 \cdot 3 + 2 \cdot 1$	$3 \cdot 3 + 2 \cdot 3$
	5	9	11	15

$$\left. \begin{array}{l} y \leq 3 \\ y \geq 1 \\ x \leq 3 \\ x \geq 1 \end{array} \right\}$$

RESOLUCIÓ

4.-a)

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 5 \\ 2x + 3y + z &= 3 \\ ax + 10y + 4z &= 2 \end{aligned} \right\}$$

$$(A/\bar{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 5 \\ 2 & 3 & 1 & \vdots & 3 \\ a & 10 & 4 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \det A = 12 + 20 + a - 3a - 10 - 8 = 14 - 2a.$$

* Si $14 - 2a \neq 0 \rightarrow a \neq 7 \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow \text{rang } A = 3 \Rightarrow$ no interessa ja que seria compatible determinat.

$$** \text{ Si } a = 7 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 5 \\ 2 & 3 & 1 & \vdots & 3 \\ 7 & 10 & 4 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang } A = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 7 & 10 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang } \bar{A} = 3$$

\Rightarrow INCOMPATIBLE, llavors interessa el valor de $a = 7 \bullet$

b)

$$\left. \begin{aligned} 2 + y + z &= 5 \\ 4 + 3y + z &= 3 \\ 2a + 10y + 4z &= 2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} y + z &= 3 \\ 3y + z &= -1 \\ 2a + 10y + 4z &= 2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} y &= 3 - z \\ 9 - 3z + z &= -1 \\ 2a + 30 - 10z + 4z &= 2 \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left. \begin{aligned} 10 &= 2z \\ 2a + 28 &= 6z \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} z &= 5 \\ 2a &= 30 - 28 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{a = 1 \bullet}} \Rightarrow \underline{\underline{z = 5}} \Rightarrow \underline{\underline{y = -2 \bullet}}$$

5.-

$$\text{Distància recorreguda en: } \begin{cases} x \rightarrow \text{taxi} \\ y \rightarrow \text{ferrocarril} \\ z \rightarrow \text{autobús} \end{cases} \Rightarrow \text{Total 200 km.}$$

$$\text{Diners gastats en: } \begin{cases} \text{Taxi} \rightarrow 5 \cdot x \\ \text{Ferrocarril} \rightarrow 2 \cdot y \\ \text{Autobús} \rightarrow 3 \cdot z \end{cases} \Rightarrow \text{Total 500€}$$

En ferrocarril, el doble que en taxi i autobús junts

RESOLUCIÓ

$$\text{Distància recorreguda en: } \begin{cases} x \rightarrow \text{taxi} \\ y \rightarrow \text{ferrocarril} \\ z \rightarrow \text{autobús} \end{cases} \Rightarrow \text{Total 200 km.}$$

$$\text{Diners gastats en: } \begin{cases} \text{Taxi} \rightarrow 5 \cdot x \\ \text{Ferrocarril} \rightarrow 2 \cdot y \\ \text{Autobús} \rightarrow 3 \cdot z \end{cases} \Rightarrow \text{Total 500€}$$

En ferrocarril, el doble que en taxi i autobus junts

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 200 \\ 5x + 2y + 3z = 500 \\ y = 2 \cdot (x + z) \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2x + 2z + z = 200 \\ 5x + 4x + 4z + 3z = 500 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 3z = 200 \\ 9x + 7z = 500 \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{200 - 3z}{3}$$

$$9 \cdot \left(\frac{200 - 3z}{3} \right) + 7z = 500 \rightarrow 600 - 9z + 7z = 500 \rightarrow 100 = 2z \rightarrow \underline{\underline{z = 50 \text{ km.}}} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{200 - 3 \cdot 50}{3} = \underline{\underline{\frac{50}{3} \text{ km}}} \rightarrow y = 2 \cdot \left(\frac{50}{3} + 50 \right) = \underline{\underline{\frac{400}{3} \bullet}}$$

6.-a)

Ingressos = n° de tones pel peu.

Anomenem x al n° de dies que es deixen passar des de l'1 d'octubre.

Tones inicials : 60 \rightarrow Preu inicial : 2000 €

Si passa 1 dia : 60 + 1 tona \rightarrow Preu : 2000 - 20

Si passa 2 dies : 60 + 2 · 1 tona \rightarrow Preu : 2000 - 2 · 20

Si passen x dies :

$$I = (60 + 1 \cdot x) \cdot (2000 - 2 \cdot x) = -20x^2 - 1200x + 2000x + 120000 = -20x^2 + 800x + 120000 \bullet$$

b)

$$I' = -40x + 800 \rightarrow I' = 0 \Rightarrow -40x + 800 = 0 \Rightarrow x = 20 \bullet$$

c)

$$I = (60 + 20) \cdot (2000 - 20 \cdot 20) = 80 \cdot 1600 = 128000 \text{ €} \bullet$$

d)

$$\text{El dia 1: } I = 60 \cdot 2000 = 120000 \text{ €}$$

$$120000 = -20x^2 + 800x + 120000 \Rightarrow 0 = -20x^2 + 800x \Rightarrow 0 = x \cdot (-20x + 800) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0, \text{ no passen dies} \rightarrow \text{l'1 d'octubre} \\ -20x + 800 = 0 \rightarrow x = 40 \bullet \end{cases}$$